4.3. HOMOMORFİZMALAR:

Tanım 4.3.1. R ve S iki halka ve $f: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in R$ için $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ve $f(ab) = f(a)f(b)$ ise f ye, R den S ye bir **halka homomorfizması** denir.

Not: $f: R \to S$ bir halka homomorfizması ise tanımdan $f:(R,+) \to (S,+)$ bir grup homomorfizması olduğu anlaşılır. O halde grup homomorfizmasındaki özellikler burada da sağlanır. Aşağıdaki teorem grup homomorfizmalarındaki ilgili teoremden sağlanır.

Teorem 4.3.2. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(i) $f(0_R) = 0_S$ olur.

(ii) $\forall a \in R$ için $f(-a) = -f(a)$ olur.

ÖRNEK: R ve S iki halka olmak üzere $\forall a \in R$ için $f(a) = 0_S$ ile tanımlı $f: R \to S$ dönüşümü bir halka homomorfizmasıdır. Gerçekten de $\forall a, b \in R$ için

$f(a)=f(b)=f(a+b)=f(ab)=0_S$ olup $f(a+b)=0_S=0_S+0_S=f(a)+f(b)$ ve $f(ab)=0_S=0_S0_S=f(a)f(b)$ olur.

ÖRNEK: $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n, x\to f(x)=\overline{x}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ için $f(x+y)=\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}=f(x)+f(y)$ ve $f(xy)=\overline{xy}=\overline{x}\cdot\overline{y}=f(x)f(y)$ olduğundan f bir halka homomorfizması olur. Ayrıca $\forall\overline{x}\in\mathbb{Z}_n$ için $f(x)=\overline{x}$ olduğundan f örtendir.

Teorem 4.3.3. $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(i) R nin her alt halkasının f altındaki görüntüsü S nin bir alt halkasıdır.

(ii) S nin her alt halkasının f altındaki ters görüntüsü R nin bir alt halkasıdır.

(iii) S nin her idealinin f altındaki ters görüntüsü R nin bir ideali olur.

İspat: (i) R nin herhangi K alt halkasını alalım. $f(K)$ kümesinin S nin bir alt halkası olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. K, R nin bir alt halkası olduğundan $\varnothing\neq K\subset R$ olup $\varnothing\neq f(K)\subset S$ olur. Herhangi $x,y\in f(K)$ alalım. $x,y\in f(K)$ olduğundan $x=f(a)$ ve

$y=f(b)$ olacak şekilde $\exists a,b\in K$ vardır. $a,b\in K$ ve K, R nin bir alt halkası olduğundan $a-b\in K$ ve $ab\in K$ olup $f(a-b)\in f(K)$ ve $f(ab)\in f(K)$ olur. Öte yandan f bir halka homomorfizması olduğundan $f(a-b)=f(a+(-b))=f(a)+f(-b)=f(a)-f(b)=x-y$ ve $f(ab)=f(a)f(b)=xy$ olur. O halde $x-y\in f(K)$ ve $xy\in f(K)$ olur. Yani $\forall x,y\in f(K)$ için $x-y\in f(K)$ ve $xy\in f(K)$ olup ilgili teoremden $f(K)$ kümesi S nin bir alt halkası olur.

(ii) S nin herhangi T alt halkasını alalım. $f^{-1}(T)$ kümesinin R nin bir alt halkası olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olduğundan ilgili teoremden $f(0_R)=0_S\in T$ olup $0_R\in f^{-1}(T)$ olur. O halde $f^{-1}(T)\neq\varnothing$ olur. Ayrıca $f^{-1}(T)\subset R$ dir. Böylece $\varnothing\neq f^{-1}(T)\subset R$ olur. Herhangi $a,b\in f^{-1}(T)$ alalım. $a,b\in f^{-1}(T)$ olduğundan $f(a),f(b)\in T$ olup T, S nin bir alt halkası olduğundan $f(a)-f(b)\in T$ ve $f(a)f(b)\in T$ olur. Öte yandan $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olduğundan $f(a-b)=f(a+(-b))=f(a)+f(-b)=f(a)-f(b)$ ve $f(ab)=f(a)f(b)$ olur. O halde $f(a-b)\in T$ ve $f(ab)\in T$ olup $a-b\in f^{-1}(T)$ ve $ab\in f^{-1}(T)$ olur. Yani

$\forall a,b\in f^{-1}(T)$ için $a-b\in f^{-1}(T)$ ve $ab\in f^{-1}(T)$ olup ilgili teoremden $f^{-1}(T)$ kümesi R nin bir alt halkası olur.

(iii) S nin herhangi J idealini alalım. $f^{-1}(J)$ kümesinin R nin bir ideali olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olduğundan ilgili teoremden $f(0_R)=0_S\in J$ olup $0_R\in f^{-1}(J)$ olur. O halde $f^{-1}(J)\neq\varnothing$ olur. Ayrıca $f^{-1}(J)\subset R$ dir. Böylece $\varnothing\neq f^{-1}(J)\subset R$ olur. Herhangi $a,b\in f^{-1}(J)$ ve herhangi $r\in R$ alalım. $a,b\in f^{-1}(J)$ ve $r\in R$ olduğundan $f(a),f(b)\in J$ ve $f(r)\in S$ olup J, S nin bir ideali olduğundan $f(a)-f(b)\in J$, $f(r)f(a)\in J$ ve $f(a)f(r)\in J$ olur. Öte yandan $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olduğundan $f(a-b)=f(a+(-b))=f(a)+f(-b)=f(a)-f(b)$, $f(ra)=f(r)f(a)$ ve $f(ar)=f(a)f(r)$ olur. O halde $f(a-b)\in J$, $f(ra)\in J$ ve $f(ar)\in J$ olup $a-b\in f^{-1}(J)$, $ra\in f^{-1}(J)$ ve $ar\in f^{-1}(J)$ olur. Yani $\forall a,b\in f^{-1}(J)$ ve $\forall r\in R$ için $a-b\in f^{-1}(J)$, $ra\in f^{-1}(J)$ ve $ar\in f^{-1}(J)$ olup tanımdan $f^{-1}(J)$ kümesi R nin bir ideali olur.

Teorem 4.3.4. $f:R\to S$ bir örten halka homomorfizması olsun. Bu durumda

(i) R nin her idealinin f altındaki görüntüsü S nin bir ideali olur.

(ii) R birimli ise S de birimlidir.

(iii) R değişmeli ise S de değişmelidir.

İspat: (i) R nin herhangi I idealini alalım. $f(I)$ kümesinin S nin bir ideali olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. I, R nin bir ideali olduğundan $\varnothing \neq I \subset R$ olup $\varnothing \neq f(I) \subset S$ olur. Herhangi $x,y\in f(I)$ ve herhangi $s\in S$ alalım. $x,y\in f(I)$ olduğundan $x=f(a)$ ve $y=f(b)$ olacak şekilde $\exists a,b\in I$ vardır. $s\in S$ ve f örten olduğundan $f(r)=s$ olacak şekilde $\exists r\in R$ vardır. I, R nin bir ideali olduğundan $a-b\in I$, $ra\in I$ ve $ar\in I$ olup $f(a-b)\in f(I)$, $f(ra)\in f(I)$ ve $f(ar)\in f(I)$ olur. Öte yandan f bir halka homomorfizması olduğundan $f(a-b)=f(a)-f(b)=x-y$, $f(ra)=f(r)f(a)=sx$ ve $f(ar)=f(a)f(r)=xs$ olur. O halde $x-y\in f(I)$, $sx\in f(I)$ ve $xs\in f(I)$ olur. Yani $\forall x,y\in f(I)$ ve $\forall s\in S$ için $x-y\in f(I)$, $sx\in f(I)$ ve $xs\in f(I)$ olup tanımdan $f(I)$ kümesi S nin bir ideali olur.

(ii) R birimli olsun. Herhangi $x \in S$ alalım. $x \in S$ ve f örten olduğundan $f(a) = x$ olacak şekilde $\exists a \in R$ vardır. $a \in R$ ve 1_R, R nin birimi olduğundan $a1_R = 1_R a = a$ olup $f(a1_R) = f(1_R a) = f(a) = x$ olur. Öte yandan f bir halka homomorfizması olduğundan $f(a1_R) = f(a) f(1_R) = xf(1_R)$ ve $f(1_R a) = f(1_R) f(a) = f(1_R) x$ olup $xf(1_R) = f(1_R) x = x$ olur. Yani $\forall x \in S$ için $xf(1_R) = f(1_R) x = x$ olup $f(1_R)$ elemanı S nin birimi olur.

(iii) R değişmeli olsun. Herhangi $x, y \in S$ alalım. $x, y \in S$ ve f örten olduğundan $x = f(a)$ ve $y = f(b)$ olacak şekilde $\exists a, b \in R$ vardır. $a, b \in R$ ve R değişmeli olduğundan $ab = ba$ olup $f(ab) = f(ba)$ olur. Öte yandan f bir halka homomorfizması olduğundan $f(ab) = f(a) f(b) = xy$ ve $f(ba) = f(b) f(a) = yx$ olur. O halde $xy = yx$ olur. Yani $\forall x, y \in S$ için $xy = yx$ olup S değişmeli olur.

Tanım 4.3.5. $f : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Eğer f hem birebir, hem de örten ise f ye bir **halka izomorfizması** denir. Bu durumda R ve S halkaları **izomorfturlar** denir ve genellikle $R \cong S$ ile ifade edilir.

Tanım 4.3.6. $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olsun. $f^{-1}(0_S)=\{x\in R \mid f(x)=0_S\}$ kümesine f nin **çekirdeği** denir ve genellikle *Çekf* ile ifade edilir. Yani $Çekf = f^{-1}(0_S)=\{x\in R \mid f(x)=0_S\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.3.7. $f:R\to S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda f nin birebir olması için gerek ve yeter koşul $Çekf=\{0_R\}$ olmasıdır.

İspat: Grup homomorfizmalarındaki gibi yapılabilir.

ÖRNEK: $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n, x\to f(x)=\overline{x}$ örten halka homomorfizmasının çekirdeğini bulalım. $x\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x\in Çekf \Leftrightarrow f(x)=\overline{0}\Leftrightarrow \overline{x}=\overline{0}\Leftrightarrow x\equiv 0 \pmod n \Leftrightarrow n \mid x \Leftrightarrow x\in n\mathbb{Z}=(n)$$

denkliklerinden $Çekf=n\mathbb{Z}=(n)$ olduğu anlaşılır.

Teorem 4.3.8. R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $\varphi : R \to R/I, r \to \varphi(r) = r + I$ ile tanımlı φ dönüşümü bir örten halka homomorfizmasıdır. Ayrıca $Çek\varphi = I$ olur. Bu halka homomorfizmasına **doğal halka homomorfizması** denir.

İspat: φ nin bir fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca φ nin tanımından $\forall x, y \in R$ için $\varphi(x+y) = x + y + I = x + I + y + I = \varphi(x) + \varphi(y)$ ve $\varphi(xy) = xy + I = (x+I)(y+I) = \varphi(x)\varphi(y)$ olup φ bir halka homomorfizması olur. Burada yine φ nin tanımından $\forall r + I \in R/I$ için $\varphi(r) = r + I$ olup φ örten olur.

Ayrıca $x \in R$ olmak üzere

$$x \in Çek\varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 0_{R/I} \Leftrightarrow x + I = I \Leftrightarrow x \in I$$

denkliklerinden $Çek\varphi = I$ olduğu anlaşılır.

Teorem 4.3.9. (Homomorfizma Teoremi). $f : R \to S$ bir halka homomorfizması ve $Çekf = K$ olsun. Bu durumda

(i) K, R nin bir idealidir.

(ii) $R/K \cong f(R)$ olur.

İspat: (i) $0_R \in Çekf = K$ olduğundan $K \neq \varnothing$ olup ayrıca $K \subset R$ olduğundan $\varnothing \neq K \subset R$ olur. Herhangi $a,b \in K$ ve herhangi $r \in R$ alalım. $a,b \in K = Çekf$ olduğundan $f(a) = f(b) = 0_S$ olup f bir halka homomorfizması olduğundan $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0_S$, $f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0_S = 0_S$ ve $f(ar) = f(a)f(r) = 0_S f(r) = 0_S$ olur. O halde $a-b \in Çekf = K$, $ra \in Çekf = K$ ve $ar \in Çekf = K$ olup K, R nin bir ideali olur.

(ii) $\overline{f} : R/K \to f(R), r+K \to \overline{f}(r+K) = f(r)$ dönüşümünü tanımlayalım. $\overline{f}$ nin kapalı olduğu açıktır. $x+K = y+K$ olan herhangi $x, y \in R$ alalım. $x+K = y+K$ olduğundan $x-y \in K = Çekf$ olup $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0_S$ olur. O halde $f(x) = f(y)$ olup $\overline{f}$ iyi tanımlı olur. Ayrıca f bir halka homomorfizması olduğundan $\overline{f}$ nin tanımından $\forall x+K, y+K \in R/K$ için

$$\overline{f}(x+K+y+K) = \overline{f}(x+y+K) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \overline{f}(x+K) + \overline{f}(y+K)$$

ve

$$\overline{f}((x+K)(y+K)) = \overline{f}(xy+K) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(x+K)\overline{f}(y+K)$$

olup $\overline{f}$ bir halka homomorfizmasıdır.

$\overline{f}(x+K)=\overline{f}(y+K)$ olan herhangi $x+K, y+K \in R/K$ alalım. $\overline{f}(x+K)=\overline{f}(y+K)$ olduğundan $f(x)=f(y)$ olup $f(x-y)=f(x)-f(y)=0_S$ olur. Bu durumda $x-y \in Çekf=K$ olup $x+K=y+K$ olur. O halde $\overline{f}$ birebir olur. Herhangi $a \in f(R)$ alalım. $a \in f(R)$ olduğundan $f(x)=a$ olacak şekilde $\exists x \in R$ vardır. Burada $\overline{f}$ nin tanımından $\overline{f}(x+K)=f(x)=a$ olup $\overline{f}$ örten olur.

$\overline{f}: R/K \rightarrow f(R)$ birebir ve örten bir halka homomorfizması olduğundan bir halka izomorfizması olup $R/K \cong f(R)$ olur.

Sonuç 4.3.10. $f: R \rightarrow S$ bir örten halka homomorfizması ve $Çekf=K$ ise $\varphi: R \rightarrow R/K$ doğal halka homomorfizması ve $\overline{f}: R/K \rightarrow f(R)=S, r+K \rightarrow \overline{f}(r+K)=f(r)$ ile tanımlı halka homomorfizması olmak üzere $f=\overline{f}\circ\varphi$ olur. Burada f nin böyle yazılışına **doğal ayrışım** denir.

Sonuç 4.3.11. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması ve $Çekf = K$ ise $\varphi: R \to R/K$ doğal halka homomorfizması, $\overline{f}: R/K \to f(R), r+K \to \overline{f}(r+K) = f(r)$ ile tanımlı halka homomorfizması ve $i: f(R) \to S, x \to i(x) = x$ ile tanımlı halka homomorfizması olmak üzere $f = i \circ \overline{f} \circ \varphi$ olur. Buradaki i birebir homomorfizmasına **gömme homomorfizması**, f nin böyle yazılışına **doğal ayrışım** denir.

4.3.12. Teorem (1. İzomorfizma Teoremi). R bir halka, S, R nin bir alt halkası ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda $S+I = \{s+a \mid s \in S \text{ ve } a \in I\}$ kümesi R nin I idealini kapsayan bir alt halkası olur. Ayrıca $S \cap I$ kümesi S nin bir ideali ve $(S+I)/I \cong S/(S \cap I)$ olur.

İspat: $0_R \in S$ olduğundan $\forall x \in I$ için $x = 0_R + x \in S+I$ olup $I \subset S+I$ olur. Burada $I \neq \varnothing$ olduğundan $S+I \neq \varnothing$ olur. Ayrıca $S+I \subset R$ olduğu da açıktır. Yani $\varnothing \neq S+I \subset R$ olur. Herhangi $x, y \in S+I$ alalım. $x, y \in S+I$ olduğundan $x = s_1 + a_1$ ve $y = s_2 + a_2$ olacak şekilde $\exists s_1, s_2 \in S$ ve $\exists a_1, a_2 \in I$ vardır. $x = s_1 + a_1$ ve $y = s_2 + a_2$ olduğundan $x - y = s_1 - s_2 + a_1 - a_2$ ve $xy = s_1 s_2 + s_1 a_2 + a_1 s_2 + a_1 a_2$ olur. Burada $s_1, s_2 \in S$ ve S, R nin bir alt halkası olduğundan $s_1 - s_2 \in S$ ve $s_1 s_2 \in S$ olur. $a_1, a_2 \in I$ ve I, R nin bir ideali olduğundan $a_1 - a_2 \in I$ olur.

Ayrıca $s_1a_2, a_1s_2, a_1a_2 \in I$ olup $s_1a_2 + a_1s_2 + a_1a_2 \in I$ olur. O halde $x - y = s_1 - s_2 + a_1 - a_2 \in S + I$ ve $xy = s_1s_2 + s_1a_2 + a_1s_2 + a_1a_2 \in S + I$ olup ilgili teoremden $S + I$ kümesi *R* nin bir alt halkası olur. Ayrıca $I \subset S + I$ olduğundan ilgili teoremden *I*, $S + I$ nın bir ideali olup $(S+I)/I$, R/I nın bir alt halkası olur.

$$f : S \to (S+I)/I, x \to f(x) = x + I$$

dönüşümünü tanımlayalım. $0_R \in I$ olduğundan $\forall x \in S$ için $x = x + 0_R \in S + I$ olup *f* kapalıdır. *f* nin iyi tanımlı olduğu da açıktır. Yani *f* bir fonksiyon olur. Ayrıca $\forall x, y \in S$ için

$f(x+y) = x + y + I = x + I + y + I = f(x) + f(y)$

ve

$f(xy) = xy + I = (x+I)(y+I) = f(x)f(y)$

olup *f* bir halka homomorfizması olur. Herhangi $\overline{y} \in (S+I)/I$ alalım. $\overline{y} \in (S+I)/I$ olduğundan $\overline{y} = y + I$ olacak şekilde $\exists y \in S + I$ vardır. $y \in S + I$ olduğundan $y = s + a$ olacak şekilde $\exists s \in S$ ve $\exists a \in I$ vardır. $y = s + a$ olduğundan $y - s = a \in I$ olup $y + I = s + I$ olur. Burada $s \in S$ için *f* nin tanımından $f(s) = s + I = y + I = \overline{y}$ olur. O halde *f* örtendir. $x \in S$ olmak üzere

$$x \in Çekf \Leftrightarrow f(x) = 0_{R/I} \Leftrightarrow x + I = I \Leftrightarrow x \in I \Leftrightarrow x \in S \cap I$$

denkliklerinden $Çekf = S \cap I$ olduğu anlaşılır. O halde Homomorfizma Teoreminden $(S+I)/I \cong S/(S \cap I)$ olup istenen elde edilir.

Teorem 4.3.13.(2. İzomorfizma Teoremi). $f : R \to S$ bir örten halka homomorfizması ve $Çekf = K$ olsun. Bu durumda S nin idealleri ile R nin K yı kapsayan idealleri arasında $I \to f^{-1}(I)$ şeklinde birebir ve örten bir eşleme yapılabilir. Burada S nin bir I ideali verildiğinde $J = f^{-1}(I)$ olmak üzere $R/J \cong S/I$ olur.

İspat: İlgili teoremden S nin her I ideali için $f^{-1}(I)$, R nin bir ideali olur. Ayrıca $0_S \in I$ olduğundan $Çekf = f^{-1}(0_S) \subset f^{-1}(I)$ olur. $f : R \to S$ bir örten fonksiyon olduğundan S nin her T alt kümesi için $f\left(f^{-1}(T)\right) = T$ olduğu gösterilebilir (ÖDEV). O halde S nin $f^{-1}(I_1) = f^{-1}(I_2)$ olan her I_1 ve I_2 idealleri için $f\left(f^{-1}(I_1)\right) = f\left(f^{-1}(I_2)\right)$ olup $f\left(f^{-1}(I_1)\right) = I_1$ ve $f\left(f^{-1}(I_2)\right) = I_2$ olduğundan $I_1 = I_2$ olur. R nin K yı kapsayan herhangi T idealini alalım. $f(T) = L$ diyelim. f örten olduğundan ilgili teoremden L, S nin bir ideali olur.

Herhangi $t \in T$ alalım. $t \in T$ olduğundan $f(t) \in f(T) = L$ olup $t \in f^{-1}(L)$ olur. O halde $T \subset f^{-1}(L)$ olur. Herhangi $x \in f^{-1}(L)$ alalım. $x \in f^{-1}(L)$ olduğundan $f(x) \in L = f(T)$ olup $f(x) = f(t)$ olacak şekilde $\exists t \in T$ vardır. $f(x) = f(t)$ ve f bir halka homomorfizması olduğundan $f(x-t) = f(x) - f(t) = 0_S$ olup $x - t \in Çekf = K$ olur. $x - t \in K$ ve $K \subset T$ olduğundan $x - t \in T$ olup ayrıca $t \in T$ ve T, R nin bir ideali olduğundan $x = x - t + t \in T$ olur. O halde $f^{-1}(L) \subset T$ olup ayrıca $T \subset f^{-1}(L)$ olduğundan $f^{-1}(L) = T$ olur. Böylece S nin idealleri ile R nin K yı kapsayan idealleri arasında $I \to f^{-1}(I)$ şeklinde birebir ve örten bir eşleme yapılabilir.

Şimdi I, S nin bir ideali ve $J = f^{-1}(I)$ olsun. $R / J \cong S / I$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$$h : R \to S / I, x \to h(x) = f(x) + I$$

dönüşümünü tanımlayalım. h nin bir fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca f bir halka homomorfizması olduğundan $\forall x, y \in R$ için

$$h(x+y) = f(x+y) + I = f(x) + f(y) + I = f(x) + I + f(y) + I = h(x) + h(y)$$

ve

$h(xy)=f(xy)+I=f(x)f(y)+I=\left(f(x)+I\right)\left(f(y)+I\right)=h(x)h(y)$
olup *h* bir halka homomorfizması olur. Herhangi $y+I\in S/I$ $(y\in S)$ alalım. $y\in S$ ve *f* örten olduğundan $f(x)=y$ olacak şekilde $\exists x\in R$ vardır. Burada h nin tanımından $h(x)=f(x)+I=y+I$ olup *h* örten olur. Öte yandan $x\in R$ olmak üzere

$$x\in Çekh \Leftrightarrow h(x)=0_{S/I} \Leftrightarrow f(x)+I=I \Leftrightarrow f(x)\in I \Leftrightarrow x\in f^{-1}(I)=J$$

denkliklerinden $Çekh=J$ olduğu anlaşılır. O halde Homomorfizma Teoreminden $R/J\cong h(R)=S/I$ olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.3.14. *R* bir halka ve *I*, *R* nin bir ideali olsun. Bu takdirde *R* nin *I* yı kapsayan idealleri ile R/I nın idealleri arasında $K\to K/I$ şeklinde birebir bir eşleme yapılabilir.
İspat: $\varphi: R\to R/I, x\to \varphi(x)=x+I$ doğal homomorfizmasını alırsak yukarıdaki teoremden istenen elde edilir.

ÖRNEK: $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{10}, x\to f(x)=\overline{x}$ örten halka homomorfizmasından yararlanarak $\mathbb{Z}_{10}$ halkasının ideallerini bulalım. Daha önce $Çekf=10\mathbb{Z}=(10)$ olduğunu göstermiştik. O halde

$\mathbb{Z}_{10}$ halkasının idealleri $m \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $(10) \subset m\mathbb{Z} = (m)$ olmak üzere $f(m\mathbb{Z}) = (\overline{m})$ şeklindedir. Burada $(10) \subset m\mathbb{Z} = (m) \Leftrightarrow m|10$ denkliği vardır. $m|10$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılar 1, 2, 5 ve 10 tamsayılarıdır. O halde $\mathbb{Z}_{10}$ halkasının idealleri $(\overline{1})$, $(\overline{2})$, $(\overline{5})$ ve $(\overline{10}) = (\overline{0})$ idealleridir.

Tanım 4.3.15. Birimli bir halkanın biriminin ürettiği alt halkaya bu halkanın **asal alt halkası** denir.

Tanımdan bir birimli halkanın asal alt halkasının o halkanın birimini kapsayan en küçük alt halkası olduğu anlaşılır.

Teorem 4.3.16. Bir tamlık bölgesi karakteristiği sıfır olan bir asal alt halkaya sahip ise $\mathbb{Z}$ ye, karakteristiği p asal tamsayısı olan bir asal alt halkaya sahip ise $\mathbb{Z}_p$ ye izomorf bir asal alt halka kapsar.

İspat: R bir tamlık bölgesi olsun. $f:\mathbb{Z}\to R, n\to f(n)=n1_R$ dönüşümünü tanımlayalım. f nin bir fonksiyon olduğu açıktır. Ayrıca ilgili teoremden $\forall m,n\in\mathbb{Z}$ için

$f(m+n)=(m+n)1_R=m1_R+n1_R=f(m)+f(n)$

ve

$f(mn)=(mn)1_R=(mn)(1_R1_R)=(m1_R)(n1_R)=f(m)f(n)$

olup f bir halka homomorfizması olur. Burada $\mathbb{Z}$ kendisinin bir alt halkası olduğundan ilgili teoremden $f(\mathbb{Z})=\{n1_R \mid n\in\mathbb{Z}\}$, R nin bir alt halkası olur. Ayrıca $f(\mathbb{Z})=\{n1_R \mid n\in\mathbb{Z}\}$, R nin asal alt halkası olduğu gösterilebilir (ÖDEV). Eğer R nin karakteristiği sıfır ise 1_R nin toplamsal mertebesi sonlu değildir ve $\text{Çek}f=\{x\in\mathbb{Z} \mid f(x)=0_R\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid x1_R=0_R\}=\{0\}$ olup ilgili teoremden f birebir olur. Bu durumda $\mathbb{Z}\cong f(\mathbb{Z})$ olup R nin asal alt halkası $\mathbb{Z}$ ye izomorf olur. Şimdi kabul edelim ki R nin karakteristiği p asal tamsayısı olsun. Bu durumda 1_R nin toplamsal mertebesi p olduğundan $x\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x\in \text{Çek}f \Leftrightarrow f(x)=0_R \Leftrightarrow x1_R=0_R \Leftrightarrow p \mid x \Leftrightarrow x\in p\mathbb{Z}$$

denkliklerinden $\text{Çek}f=p\mathbb{Z}$ olduğu anlaşılır. O halde Homomorfizma Teoreminden $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cong f(\mathbb{Z})$ olur. Ayrıca $p\mathbb{Z}$, $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_p, x\to h(x)=\overline{x}$ örten homomorfizmasının çekirdeği olduğundan yine Homomorfizma Teoreminden $\mathbb{Z} / p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ olur. O halde $f(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p$ olup R nin asal alt halkası $\mathbb{Z}_p$ ye izomorf olur.